# Лабораторная работа №4

# Тема: Численное интегрирование

Формулы, используемые для приближенного вычисления однократных интегралов, называют квадратурными формулами. Простой прием построения квадратурных формул состоит в том, что подынтегральная функция  заменяется на отрезке  интерполяционным многочленом, например, многочленом Лагранжа . Это позволяет с учетом изученных в предыдущей лабораторной работе свойств интерполирующего многочлена записать для интеграла приближенное равенство

|  |  |
| --- | --- |
| . | (4.1) |

При записи формулы (4.1), предполагается, что отрезок  разбит на  частей точками (узлами) , выбор которых осуществляется также, как и при построении многочлена . Для равноотстоящих узлов , где , , 

При замене интерполяционного полинома Лагранжа кусочно-постоянной функцией может быть получена формула трапеций, которая имеет следующий вид

|  |  |
| --- | --- |
| . | (4.2) |

где  − значения функции в узлах интерполяции ().

При использовании метода трапеций для оценки погрешности метода интегрирования по формуле (4.2) получаем следующее соотношение:

|  |  |
| --- | --- |
| , | (4.3) |

где , .

Во многих случаях более точный результат получается при использовании формулы Симпсона (формулы парабол), основанной на квадратичном приближении интегрируемой функции между узлами интерполяции:

|  |  |
| --- | --- |
| . | (4.4) |

Для формулы Симпсона оценка погрешности определяется следующим соотношением:

|  |  |
| --- | --- |
| , | (4.5) |

где , .

**Задание 1**

Составить программу вычисления интеграла от заданной функции на отрезке  с использованием метода трапеций с шагом  и . Сравнить результаты. Оценить точность по формуле (4.3). Сравнить результаты. Исходные данные для выполнения задания берутся из таблицы 4.

Таблица 4.1

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| N | Функция |  |  |
| 1 |  | 0 | 1 |
| 2 |  | 1 | 2 |
| 3 |  | 1 | 2 |
| 4 |  | 2 | 3 |
| 5 |  | 0 | 1 |
| 6 |  | 1 | 2 |
| 7 |  | 1.2 | 2.2 |
| 8 |  | 1 | 2 |
| 9 |  | 2 | 3 |
| 10 |  | 3 | 4 |

**Задание 2**

Составить программу вычисления интеграла от заданной функции на отрезке  по формуле Симпсона методом повторного счета с точностью . Исходные данные для выполнения задания берутся из таблицы 4.

Примерный фрагмент выполнения лабораторной работы. При выборе тестового примера необходимо выбирать функцию, интеграл которой может быть вычислен аналитически. Полученное при этом значение позволяет оценить точность различных методов численного иньтегрирования.

Вычислить интеграл от заданной функции на отрезке  по формуле трапеций и формуле Симпсона. Сравнить получаемы е результаты.

|  |  |
| --- | --- |
| , , . | (4.6) |

Задаем число узлов разбиения  и определяем . Вычисляем значения функции в узлах сетки

, , .

Получаемое значение интеграла по формуле трапеций

,

Получаемое значение интеграла по формуле Симпсона

.

Результаты вычислений интеграла (4.6) с использованием обеих формул приведены в таблице 4.2.

Таблица 4.2

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 4 | 0,073 | 0,186 |
| 6 | 0,069 | 0,065 |
| 8 | 0,067 | 0,065 |
| 10 | 0,067 | 0,065 |

Точное (аналитически вычисленное значение интеграла) равно 0,065.

# Контрольные вопросы

1. Какие преимущества имеет использование формулы парабол по сравнению с использованием формулы трапеций? Следствием чего являются эти преимущества?

2. Верны ли формулы (4.2), (4.4) для случая неравномерного расположения узлов?

3. В каких случаях использование приближенных формул трапеций и парабол дает точные результаты?

4. Как влияет на точность численного интегрирования величина шага?

5. Каким способом (на основе каких формул) можно прогнозировать примерную величину шага для достижения заданной точности интегрирования?

6. Можно ли добиться неограниченного уменьшения погрешности интегрирования путем последовательного уменьшения шага?